Derivación de la fórmula cúbica

Considere la ecuación cúbica en la forma $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = 0$, donde $a_3 \neq 0$.

1. Divida ambos lados de la ecuación por a_3:

$$\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} z + \frac{a_2}{a_3} z^2 + z^3 = 0$$

2. Sustituya $z \leftarrow x - \frac{a_2}{3a_3}$ y desarrolle:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3}\left(x - \frac{a_2}{3a_3}\right) + \frac{a_2}{a_3}\left(x - \frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + \left(x - \frac{a_2}{3a_3}\right)^3 &= 0\\ \frac{a_0}{a_3} + \left(\frac{a_1}{a_3}x - \frac{a_1 a_2}{3a_3^2}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3}x^2 - \frac{2a_2^2}{3a_3^2}x + \frac{a_2^3}{9a_3^3}\right) + \left(x^3 - \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_2^2}{3a_3^2}x - \frac{a_2^3}{27a_3^3}\right) &= 0\\ \left(\frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1 a_2}{3a_3^2} + \frac{2a_2^3}{27a_3^3}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}\right)x + x^3 &= 0\end{aligned}$$

3. Para simplificar, defina

$$\begin{aligned}b_0 &\equiv \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1 a_2}{3a_3^2} + \frac{2a_2^3}{27a_3^3},\\ b_1 &\equiv \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2},\end{aligned}$$

   lo que reduce la ecuación a $b_0 + b_1 x + x^3 = 0$.

4. Sustituya $x \leftarrow w - \frac{b_1}{3w}$ y desarrolle:

$$\begin{aligned}b_0 + b_1\left(w - \frac{b_1}{3w}\right) + \left(w - \frac{b_1}{3w}\right)^3 &= 0\\ b_0 + \left(b_1 w - \frac{b_1^2}{3w}\right) + \left(w^3 - b_1 w + \frac{b_1^2}{3w} - \frac{b_1^3}{27w^3}\right) &= 0\\ -\frac{b_1^3}{27w^3} + b_0 + w^3 &= 0\end{aligned}$$

5. Multiplique por w^3 para obtener una ecuación cuadrática en w^3:

$$\left(-\frac{b_1}{3}\right)^3 + b_0 w^3 + \left(w^3\right)^2 = 0$$

6. Resuelva w^3 utilizando la fórmula cuadrática:

$$w^3 = -\frac{b_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{3}\right)^3} \quad \left(\text{alternativamente, } w^3 = -\frac{b_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{3}\right)^3}\right)$$

Todos los números complejos tienen tres raíces cúbicas distintas, excepto el cero. Al elegir cualquiera de ellas para w y sustituirla, se obtienen las tres soluciones de la ecuación cúbica:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{b_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{3}\right)^3}} - \frac{b_1}{3\sqrt[3]{-\frac{b_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}} - \frac{a_2}{3a_3}.$$

Esta fórmula solo falla si ambas opciones para w^3 son cero (es decir, $b_0 = b_1 = 0$). En este caso, la cúbica tiene una raíz triple en $z = -\frac{a_2}{3a_3}$.

Solución trigonométrica alternativa
A partir de la ecuación cúbica reducida, es posible derivar una fórmula cúbica trigonométrica.

1. Sustituya $x \leftarrow \frac{2\sqrt{-b_1}}{\sqrt{3}} \cos(w)$ en la ecuación:

$$b_0 + b_1 \left(\frac{2\sqrt{-b_1}}{\sqrt{3}} \cos(w) \right) + \left(\frac{2\sqrt{-b_1}}{\sqrt{3}} \cos(w) \right)^3 = 0$$
$$b_0 - \frac{2(-b_1)^{3/2}}{\sqrt{3}} \cos(w) + \frac{8(-b_1)^{3/2}}{3\sqrt{3}} (\cos(w))^3 = 0$$

2. Multiplique por $\frac{3\sqrt{3}}{2(-b_1)^{3/2}}$:

$$\frac{3\sqrt{3}b_0}{2(-b_1)^{3/2}} - 3\cos(w) + 4(\cos(w))^3 = 0$$

   Utilizando la identidad trigonométrica $4(\cos(w))^3 - 3\cos(w) = \cos(3w)$, esto se simplifica a

$$\frac{3\sqrt{3}b_0}{2(-b_1)^{3/2}} + \cos(3w) = 0.$$

3. Resuelva w utilizando la función coseno inversa:

$$w = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}b_0}{2(-b_1)^{3/2}} \right)$$

Dado que la función coseno es periódica, sigue habiendo solo tres soluciones para x, que tras sustituir $z = x - \frac{a_2}{3a_3}$ dan las tres raíces de la ecuación cúbica original:

$$z = \frac{2\sqrt{-b_1}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}b_0}{2(-b_1)^{3/2}} \right) + \frac{2\pi n}{3} \right) - \frac{a_2}{3a_3}, \text{ para } n = 0, 1, 2.$$

Este método falla si $b_1 = 0$, reduciendo la ecuación a $b_0 + x^3 = 0$, que se resuelva fácilmente.